Anotações Matemáticas sobre Teoria dos Preços e Distribuição

Gustavo Bhering, maio de 2016

I. Algumas propriedades gerais do sistema econômico

Podemos representar o sistema econômico por duas matrizes que nos fornecem as quantidades de mercadorias e de trabalho necessárias para a reprodução do sistema. Seja:

$$(1)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{n1}\ a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$(2)\ \mathbf{l} = [l_1\ l_2\ \cdots\ l_n]$$

Onde **A** é a matriz quadrada *nxn* que representa os insumos necessários em termos físicos. Nesta matriz, o termo a_{ij} representa a quantidade do bem *i* necessária para a produção do bem *j*. Cada termo deste é obtido da seguinte forma:

$$(3)\ a_{ij} = \frac{A_{ij}}{X_j}$$

Onde A_{ij} é a quantidade em termos absolutos do bem *i* necessária para a produção do bem *j* e X_j é a quantidade total produzida da mercadoria *j*. Além disto, a matriz linha **l** nos fornece os requesitos de horas de trabalho diretamente necessárias para a produção de cada bem. Será útil delimitar algumas propriedades gerais da matriz **A** que nos servirão mais adiante.

I.1. Matrizes redutíveis e irredutíveis

Primeiramente, vamos definir estes dois conceitos. Uma matriz **A** é considerada redutível quando, através de manipulações de troca de ordem de linhas e colunas, conseguimos rearranjá-la de forma:

$$(4)\ \mathbf{A}' = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A'_{11}} & \mathbf{A'_{12}} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A'_{22}} \end{array}\right]$$

Onde $\mathbf{A'_{ij}}$ são sub-matrizes da matriz original. Uma matriz é chamada irredutível quando não é possível realizar este tipo de transformação. Em termos de significado econômico, uma matriz irredutível compreende apenas bens básicos, ao passo que uma matriz redutível inclui os não básicos. Trabalharemos, no restante desta apresentação apenas com sistemas que possuem bens básicos. Para matrizes irredutíveis, podemos estabelecer um conjunto de propriedades conhecido como Teoremas de Perron-Frobenius.

I.2. Teoremas de Perron-Frobenius

Seja **A** uma matriz quadrada não-negativa e irredutível. Temos que:

(i) **A** possui um autovalor real máximo $\lambda_m > 0$, não repetido e de maior valor em módulo. Um autovetor positivo **x*** está associado apenas a este autovalor máximo.

(ii) $[\mu\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1} > 0$ se, e somente se, $\mu > \lambda_m$.

(iii) λ_m é uma função crescente de cada elemento a_{ij} de **A**.

(iv) Se s for a menor, e S for a maior, das somas de todas as linhas de **A**, então $s < \lambda_m < S$. Se s=S, então $s = \lambda_m = S$. O mesmo vale para a soma das colunas.

II. Produção sem excedente

Suponha uma economia que não produza excedente. Podemos representar o sistema de preços dessa economia através das matrizes que definimos anteriormente. Neste exemplo, vamos supor que a matriz **A** já contém todos os meios de subsistência dos trabalhadores. Esta transformação pode ser demonstrada da seguinte forma. Suponha que o salário seja determinado por uma dada cesta de bens, **b**, que é representada por um vetor coluna de dimensão nx1. Desta forma, temos que $w = p_1b_1 + p_2b_2 + \ldots + p_nb_n$. Em matrizes:

(5) $w = \mathbf{pb}$

Onde **p** é o vetor linha de preços de dimensão 1xn. A nova matriz que contém tanto os coeficientes técnicos quanto os requisito da cesta do salário real pode ser construída como:

(6) $\mathbf{A} = \mathbf{A}^* + \mathbf{bl}$

Onde **A*** é a matriz apenas de coeficientes técnicos. Podemos ver que a matriz **bl** será quadrada de dimensão nxn, portanto, podemos somar ambas as matrizes **A*** e **bl** e obter **A**. A condição de que não se produz excedente pode ser escrita como:

(7) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad onde\ i = 1, 2, ..., n$

Desta forma, o sistema de preços fica definido como:

(8) $\mathbf{pA} = \mathbf{p}$

Note que este sistema é muito semelhante a um problema de encontrar autovalores para o caso específico em que o autovalor é igual a um. Sabemos que a matriz **A** possui um autovalor máximo real positivo e único pela propriedade *(i)*. Ainda, Como a soma de todas as linhas é igual a 1, pela propriedade *(iv)* sabemos que o vetor de preços é o autovetor associado a este autovalor máximo e que é positivo. Assim $\mathbf{p^*} > \mathbf{0}$. Sabemos também que qualquer múltiplo deste autovetor também é solução para o sistema. O que nos interessa, no entanto, é a proporção entre cada elemento deste vetor, o que nos dá exatamente os preços relativos. Se quisermos o vetor de preços relativos em termos de alguma mercadoria *i*, podemos calcular:

(9) $\mathbf{p} = \frac{1}{p_i}\mathbf{p}^*$

III. Produção com excedente

Da mesma forma que calculamos o sistema de preços sem excedente, podemos fazê-lo também para um sistema que produz excedente. Nossa condição agora passa a ser:

(7') $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} < 1 \quad onde\ i = 1, 2, ..., n$

Com a produção do excedente, devemos acrescentar a regra de distribuição deste excedente que significa que será obtida uma taxa de lucro proporcional ao capital investido. O sistema de preços fica definido como:

(9) $\mathbf{pA}(1+r) = \mathbf{p}$

Este sistema possui *n* equações e *n*+1 incógnitas (os *n* preços e a taxa de lucro). Podemos fixar um dos preços como numerário e obter os preços relativos e a taxa de lucro. Este problema se assemelha a um problema de autovalor. Pela propriedade *(i)* sabemos que existe apenas um autovalor (máximo) que é único e que nos fornece um vetor de preços relativos positivos. Assim, encontramos a taxa de lucro, *r*, obtendo a solução não-trivial ($\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$) do problema:

(10) $\mathbf{p}[\mathbf{I} - (1+r)\mathbf{A}] = \mathbf{0}$

A solução não-trivial depende do valor do determinante da matriz [**I** - (1+*r*)**A**] ser igual a zero. Portanto, a solução é encontrada fazendo:

(11) $\det|\mathbf{I} - (1+r)\mathbf{A}| = 0$

Uma vez encontrado o autovalor máximo e a taxa de lucro, o vetor de preços será o autovetor associado a este autovalor.

Podemos agora representar o sistema de outra forma, separando o salário em dois componentes, um de subsistência e outro componente que faz parte da disputa do excedente. Os salários, *w*, podem ser pagos antes do processo produtivo ou após. Podemos representar os dois casos:

(12) $\mathbf{pA}(1+r) + w\mathbf{l} = \mathbf{p}$

(13) $(\mathbf{pA} + w\mathbf{l})(1+r) = \mathbf{p}$

Neste sistema, agora, possuímos *n* equações e *n*+2 incógnitas (os *n* preços, a taxa de lucro e a taxa de salário). Podemos fixar uma variável distributiva, porém ainda teríamos um sistema sobredeterminado. Para tanto, podemos fixar um preço como numerário, por exemplo, a mercadoria 1, de modo que p_1 = 1. Neste contexto, poderíamos reinterpretar **p** como o vetor de preços relativos. Deste modo, a solução do sistema fica:

(14) $\mathbf{p} = w\mathbf{l}[\mathbf{I} - (1+r)\mathbf{A}]^{-1}$

(15) $\mathbf{p} = (1+r)w\mathbf{l}[\mathbf{I} - (1+r)\mathbf{A}]^{-1}$

Ainda não investigamos nada a respeito das propriedades da solução do sistema. Para tanto, será útil avaliar dois casos particulares. Para o restante da apresentação utilizaremos a representação do sistema em (12) e sua solução, (14).

III.1. Taxa de lucro igual a zero

Ao longo do restante desta apresentação estaremos medindo os preços relativos em trabalho comandado, ou seja, fazendo $w = 1$. O primeiro caso que exploraremos será o caso em que, na equação (14), temos que a taxa de lucro é igual a zero. Em outras palavras, $r = 0$. Vemos, na equação (10), que isto resulta em:

(16) $$\begin{array}{l}\mathbf{p} = w\mathbf{l}[\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \\ Com\; w = 1,\; \mathbf{p} = \mathbf{l}[\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\end{array}$$

A matriz $[\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ (inversa de Leontief) nos fornece a quantidade de todos os bens, direta e indiretamente, necessária para produzir cada bem. Quando multiplicamos $[\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ pelos coeficientes de trabalho direto, **l**, obtemos as quantidades de trabalho direta e indiretamente necessárias para produzir cada mercadoria. Em outras palavras, neste caso os preços relativos são proporcionais ao trabalho incorporado. Sabemos que $[\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ é positiva pelas propriedades *(iv)* e *(ii)*. Pela propriedade *(iv)* sabemos que o autovalor máximo de A é menor que 1, pois a soma de qualquer linha é menor que 1. Ao mesmo tempo, esta inversa é equivalente a resolver um problema de autovalor no qual o autovalor é precisamente 1. Como $\lambda_m < 1$, pela propriedade *(ii)* sabemos que $[\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ é positiva.

III.2. A taxa máxima de lucro

Outro caso particular diz respeito a quando o salário (proveniente da disputa de excedente) é igual a zero. Este caso pode ser interpretado tanto como sendo igual ao caso onde há apenas o salário de subsistência como em (9) ou então quando o salário de fato é zero. Neste caso, o sistema (12) se transforma em:

(17) $\mathbf{pA}(1+R) = \mathbf{p}$

Onde R é a taxa máxima de lucro. Note que isto se assemelha a um problema de autovalor do tipo:

(18) $\mathbf{pA} = \lambda\mathbf{p} \quad onde\; \lambda = \dfrac{1}{1+R}$

Pela propriedade *(i)* sabemos que existe apenas um autovalor que nos fornece um vetor de preços positivo e que este autovalor é único. Desta forma, a taxa máxima de lucro fica determinada como:

(19) $1 + R = \dfrac{1}{\lambda_m}$

Pela propriedade *(ii)*, tínhamos que, no caso geral, o vetor de preços será positivo enquanto $\mu > \lambda_m$. Entretanto, para a solução geral temos:

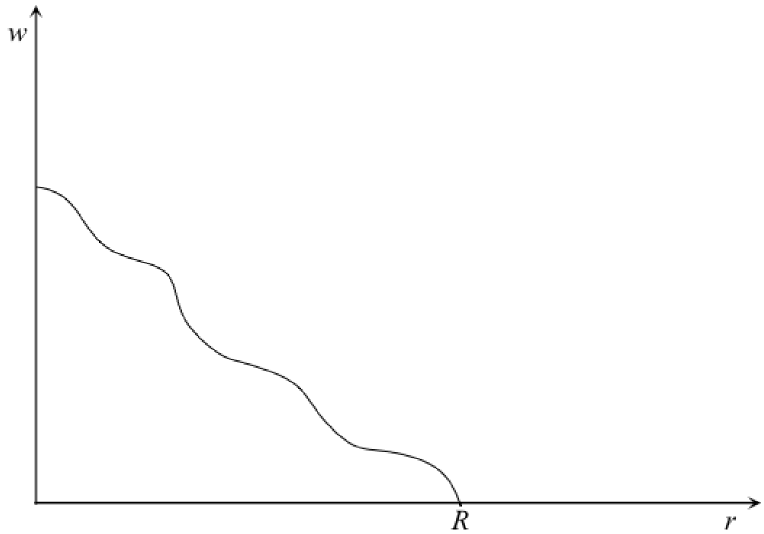
(20) $\mu = \dfrac{1}{1+r}$

Isto significa que o vetor de preços relativos será positivo enquanto $0 \leq r \leq R$.

IV. As relações entre os preços relativos, salário e taxa de lucro

IV.1. A relação entre o salário e a taxa de lucro

Podemos analisar a relação entre a taxa de lucro e o salário real observando a solução do sistema de preços. A matriz $[\mathbf{I} - (1+r)\mathbf{A}]^{-1}$ será um polinômio de grau até n. Isto pode ser visto pelo fato de que, para inverter, dividimos a matriz adjunta pelo determinante. No cálculo do determinante, temos o termo $(1+r)$ multiplicado n vezes na diagonal principal. Isto nos mostra que existe uma relação inversa entre o salário real e a taxa de lucro (basta isolar o salário). Ao mesmo tempo, esta relação segue este polinômio complexo, e pode ter um formato do tipo:



Esta relação terá tantos pontos de inflexão dependendo da quantidade de mercadorias.

IV.2. Mudanças nos preços relativos como resultado de uma mudança na taxa de lucro

Até agora, nosso desenvolvimento matemático serviu para mostrar que existe uma solução única e positiva para o vetor de preços e que podemos encontrá-la a partir da técnica em uso e de alguma regra de fixação de alguma variável distributiva. Vamos analisar agora como se comportam os preços relativos quando a taxa de lucro varia. Desta forma, a expressão geral do preço relativo da mercadoria *j* em relação a mercadoria 1, por exemplo, fica:

$$(21)\quad \frac{p_j}{p_1} = \frac{l_j + (1+r)\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} p_i}{l_1 + (1+r)\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i1} p_i}$$

Podemos calcular a inclinação desta função da seguinte forma:

$$(22)\quad \frac{d\frac{p_j}{p_1}}{dr} = \left[p_1 \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i - p_j \sum_{i=1}^{n} a_{i1} p_i\right] + (1+r)\left[p_1 \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \frac{dp_i}{dr} - p_j \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \frac{dp_i}{dr}\right]$$

Esta expressão, além de assustar o leitor, permite tirar algumas conclusões sobre a relação entre preços relativos e distribuição. O primeiro termo em colchetes possui um sinal determinado e depende da proporção entre os meios de produção empregados na produção de *j* e 1. Entretanto, o segundo termo em colchetes possui sinal indefinido, pois depende das mudanças no sistema como um todo, o que impossibilita de saber ao certo o sinal que terá esta derivada. Isto significa dizer que os preços relativos podem ter uma relação positiva ou negativa com a taxa de lucro dependendo do próprio valor da taxa de lucro, como mostrado pela expressão (18).

V. Redução a quantidades de trabalho "datadas"

Pode ser provado que, dado que os coeficientes da matriz **A** são menores que 1 e que, como no caso da produção com excedente, a soma de cada linha é menor do que 1:

$$(23)\quad \lim_{N\to\infty} \mathbf{A}^N = \mathbf{0}$$

Dado esta propriedade, suponha a seguinte soma:

$$(24)\quad \sum_{i=0}^{N} ((1+r)\mathbf{A})^i = ((1+r)\mathbf{A})^0 + (1+r)\mathbf{A} + ((1+r)\mathbf{A})^2 + \ldots + ((1+r)\mathbf{A})^N$$

Podemos pré-multiplicar cada lado por [**I** – (1+*r*)**A**] e obter:

$$(25)\quad \begin{aligned} &[\mathbf{I} - (1+r)\mathbf{A}] \sum_{i=0}^{N} ((1+r)\mathbf{A})^i = \\ &[\mathbf{I} - (1+r)\mathbf{A}]\left[((1+r)\mathbf{A})^0 + (1+r)\mathbf{A} + ((1+r)\mathbf{A})^2 + \ldots + ((1+r)\mathbf{A})^N\right] \end{aligned}$$

$$(26)\quad \begin{aligned} [\mathbf{I} - (1+r)\mathbf{A}] \sum_{i=0}^{N} ((1+r)\mathbf{A})^i &= \mathbf{I} + (1+r)\mathbf{A} + \ldots + ((1+r)\mathbf{A})^N \\ &\quad -(1+r)\mathbf{A} - \ldots - ((1+r)\mathbf{A})^N - ((1+r)\mathbf{A})^{N+1} \end{aligned}$$

$$(27)\quad [\mathbf{I} - (1+r)\mathbf{A}] \sum_{i=0}^{N} ((1+r)\mathbf{A})^i = \mathbf{I} - ((1+r)\mathbf{A})^{N+1}$$

Porém, pela equação (23) sabemos que o último termo converge a zero. Isto significa dizer que:

$$(28)\ [\mathbf{I}-(1+r)\mathbf{A}]\left[\mathbf{I}+((1+r)\mathbf{A})+((1+r)\mathbf{A})^2+...\right]=\mathbf{I}$$

Mas se esta matriz pós-multiplica [**I** – (1+r)**A**] e o produto é a identidade, isto significa que esta soma é igual a inversa de [**I** – (1+r)**A**], ou seja:

$$(29)\ [\mathbf{I}-(1+r)\mathbf{A}]^{-1}=\mathbf{I}+(1+r)\mathbf{A}+((1+r)\mathbf{A})^2+...$$

Isto nos permite escrever os preços em (14) como:

$$(30)\ \mathbf{p}=\mathbf{l}[\mathbf{I}+(1+r)\mathbf{A}+(1+r)^2\mathbf{A}^2+(1+r)^3\mathbf{A}^3+...]$$

Cada termo desta soma representa uma matriz, na qual cada coluna significa a quantidade de mercadorias necessárias em cada "período" de produção para a produção de uma unidade da mercadoria final. Ao pré-multiplicarmos esta soma pelo vetor de quantidades de trabalho diretamente necessárias, obtemos uma série infinita de quantidades de trabalho direta e indiretamente necessárias em cada "período" de produção.

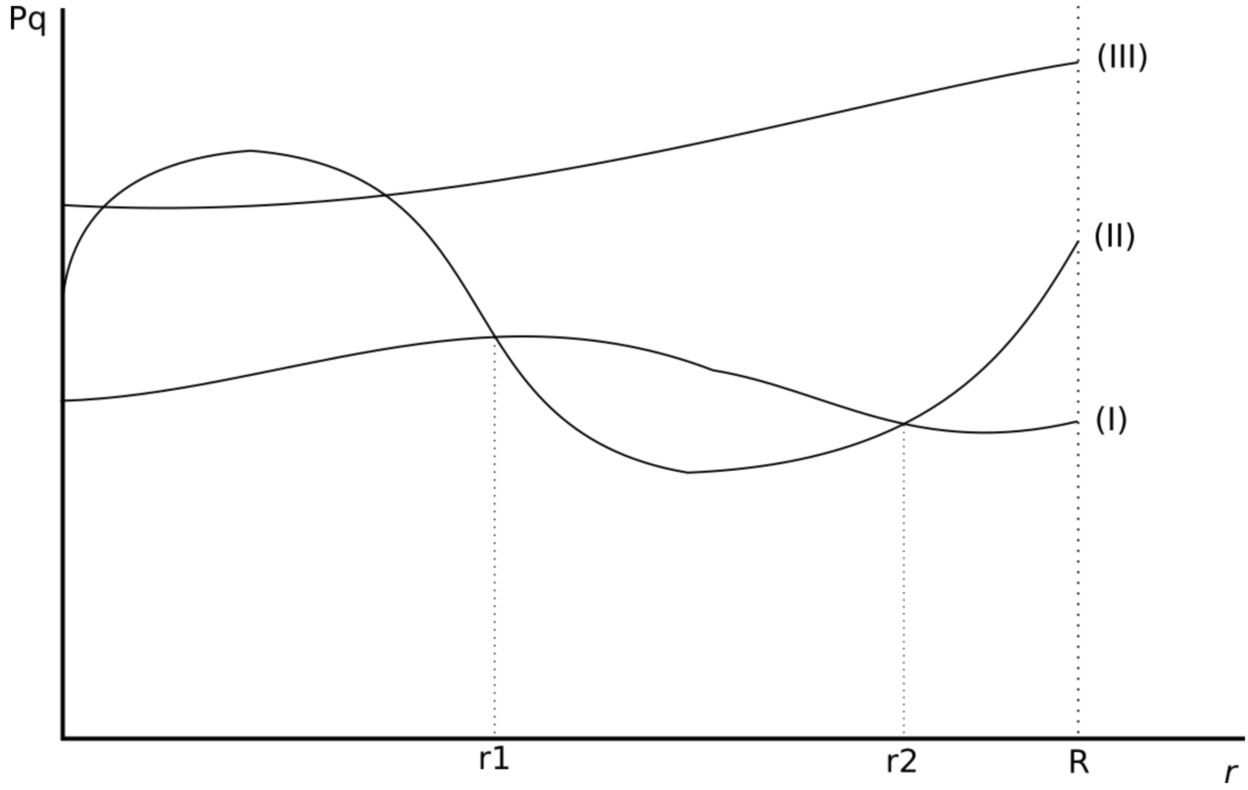
VI. Escolha de técnicas

VI.1. Escolha de técnicas de bens não básicos

Vamos avaliar como um método de produção, dentre vários métodos de produção disponíveis, é escolhido para se produzir um bem não básico. Suponha que um bem não básico, q, pode ser produzido por três métodos diferentes, (I), (II) e (III). Em cada um desses diferentes métodos, a mercadoria q é produzida apenas através dos outros básicos. Ao mesmo tempo, suponha que apenas este bem não básico possui métodos alternativos de produção e que o sistema de básicos é dado. Vamos tomar algum dentre os bens básicos como numerário no nosso exemplo, de modo que o preço do bem não básico e os custos estão expressos em termos de um dos bens básicos. As equações de preços de cada método de produção podem ser escritas como:

$$p_q^{(I)}=\sum p_i a_{iq}^{(I)}(1+r)+wl_q^{(I)}$$
$$p_q^{(II)}=\sum p_i a_{iq}^{(II)}(1+r)+wl_q^{(II)}$$
$$p_q^{(III)}=\sum p_i a_{iq}^{(III)}(1+r)+wl_q^{(III)}$$

Onde os sobrescritos (I), (II) e (III) denominam os diferentes métodos de produção. Aqui, evidentemente, os preços relativos e a taxa de lucro são dados como resultado da solução do sistema de básicos. A relação entre o preço de q (medido em termos de um bem básico) e a taxa de lucro é:



O critério de escolha de técnicas será o critério da técnica que minimiza os custos de produção. Neste sentido, para cada taxa de lucro, a técnica escolhida será aquela com o menor preço. Podemos ver que a técnica (III) jamais será escolhida, pois, para qualquer taxa de lucro, o preço de *q* sempre é maior usando (III) em relação a (I) e (II). Para taxas de lucro no intervalo $0 < r < r1$, a técnica (I) será escolhida, pois é a técnica com menor custo de produção. Para valores de r onde $r1 < r < r2$, a técnica (II) passa a ser a mais rentável. Por fim para $r2 < r < R$, a técnica (I) volta a ser a técnica que minimiza custos. A escolha de técnicas depende, aqui, tanto dos métodos alternativos quanto da distribuição, pois mudanças na taxa de lucro afetam os preços relativos no sistema de básicos e o preço do não básico se comportante de forma irregular em relação a taxa de lucro dependendo do método analisado.

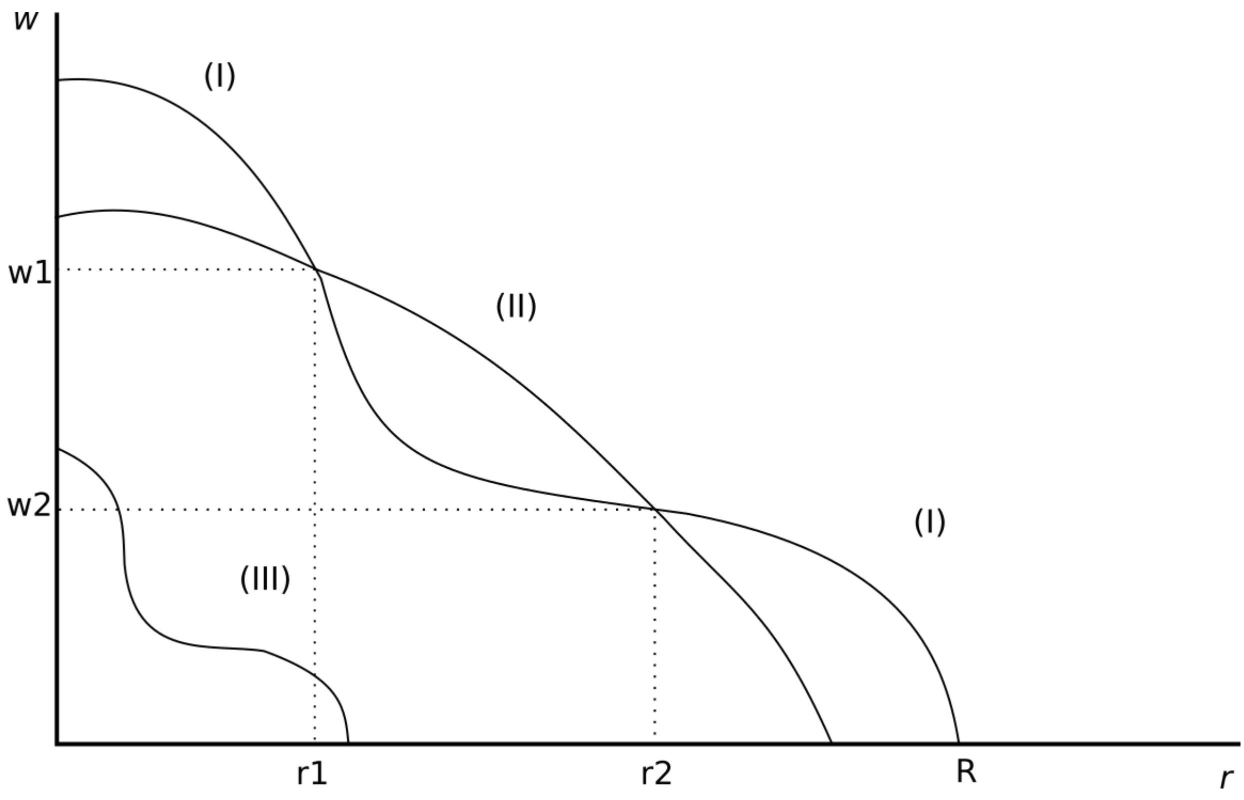
Como a produção de não básicos não corresponde a um sistema, podemos avaliar a escolha de técnicas para cada bem não básico de forma individual, pois mudanças no preço do não básico não afetam nenhum dos outros preços relativos. Entretanto, isto não é verdade para os básicos. Como a produção de básicos corresponde a um sistema, é preciso avaliar a escolha de técnicas no sistema como um todo, visto que os básicos entram direta e indiretamente na produção de todas as mercadorias.

VI.2. Escolha de técnicas de bens básicos

Como vimos na seção, IV, um conjunto de métodos de produção determina uma curva salário-lucro. A curva salário-lucro tem tantos pontos de inflexão quantos bens básicos existem na economia. Suponha que a tecnologia, definida como conjunto de métodos de produção, é tal que há 3 conjuntos de métodos de produção. Estes diferentes conjuntos de métodos podem ser diferentes tanto por diferir na produção de um bem, na produção de diversos bens ou em todos os bens básicos. Qualquer coeficiente diferente na matriz insumo-produto ou na matriz de trabalho direto determina um outro conjunto de produção, um outro sistema. Estes 3 métodos diferentes são, respectivamente, os métodos (I), (II) e (III). Podemos representar como se determinam os preços de produção utilizando cada método como:

$$\mathbf{p}^{(\mathbf{I})}\mathbf{A}^{(\mathbf{I})}(1+r)+w^{(I)}\mathbf{l}^{(\mathbf{I})}=\mathbf{p}^{(\mathbf{I})}$$
$$\mathbf{p}^{(\mathbf{II})}\mathbf{A}^{(\mathbf{II})}(1+r)+w^{(II)}\mathbf{l}^{(\mathbf{II})}=\mathbf{p}^{(\mathbf{II})}$$
$$\mathbf{p}^{(\mathbf{III})}\mathbf{A}^{(\mathbf{III})}(1+r)+w^{(III)}\mathbf{l}^{(\mathbf{III})}=\mathbf{p}^{(\mathbf{III})}$$

Cada um destes métodos determinam um vetor de preços relativos como solução do sistema. Ao mesmo tempo, tomando algum bem básico como numerário, podemos representar a curva entre salário real e taxa de lucro dos 3 métodos:



Cada curva representa um método de produção. O que queremos responder através das relações salário-lucro é quais métodos serão adotados. Para isso é preciso estabelecer o critério da escolha de métodos de produção dentre todos os métodos disponíveis. O método escolhido será o método que minimiza os custos, ou, o método que proporciona a maior taxa de lucro, dado um salário real. Para cada nível de salário real a técnica escolhida é aquela associada com a maior taxa de lucro. Em termos do nosso exemplo, podemos ver que a técnica (III) jamais será escolhida, pois para qualquer nível de salário real, ela está associada com uma taxa de lucro menor em relação tanto a (I) quanto a (II).

Como podemos ver na figura, para qualquer salário real acima de w1, a técnica que proporciona a maior taxa de lucro é a técnica (I). Em w1, a técnica (I) e a técnica (II) dão a mesma taxa de lucro, r1. Neste ponto, tanto a técnica (I) quanto a (II) podem ser adotadas. Estes pontos de cruzamento entre as curvas salário-lucro são os *switch points*. A partir de salários abaixo de w1, o método (II) passa a ser adotado. Para salários abaixo de w2, a técnica (I) volta a dar maior rentabilidade e passa a ser adotada de novo. O que vemos, portanto, é que a escolha de técnicas depende não apenas do conjunto de métodos de produção, mas também da distribuição. Pelo critério de maior rentabilidade, portanto, a curva salário-lucro resultante da escolha de técnicas é o contorno da interseção de todas as curvas salário-lucro.

Quando calculamos as curvas salário-lucro escolhemos um numerário, onde o salário é expresso em termos desse numerário. A escolha de outro bem como medida dos preços relativos afeta o formato das curvas salário-lucro mas não afeta os *switch points*. Isto significa que, independente do numerário escolhido, sempre teremos o mesmo ordenamento de técnicas.

VI.3. Implicações para a teoria marginalista

Vamos voltar ao gráfico das relações salário-lucro dos 3 métodos no nosso exemplo. Podemos dizer quais métodos são mais intensivos em trabalho, olhando para as matrizes. Como vimos, quando a taxa de lucro é igual a zero, os preços relativos são proporcionais ao trabalho direto e indireto para se produzir todas as mercadorias. Ao mesmo tempo, com a taxa de lucro igual a zero, todo o produto líquido vai para os trabalhadores. Quando a taxa de lucro é zero:

$$\mathbf{pX} = w\mathbf{lX} + \mathbf{pAX}$$

$$w = \frac{\mathbf{p}(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}}{\mathbf{lX}}$$

Técnicas mais intensivas em trabalho estão associadas a um salário real menor. Ou seja, o intercepto das curvas salário-lucro nos dizem quais técnicas são mais intensivas em trabalho. Em termos do nosso exemplo, a técnica (II) é mais intensiva em trabalho do que a técnica (I). Isto nos permite observar a relação entre "intensidade dos fatores" e distribuição.

Suponha que o salário real é tal que $w>w1$. Neste intervalo, a técnica (I) é escolhida. Se o salário cair abaixo de w1, ou seja, a partir do ponto $w1<w<w2$, a técnica (II) passa a ser utilizada. Neste caso, uma queda do salário real levou a adoção de uma técnica mais intensiva em trabalho. Quando o salário caiu abaixo de w1, a técnica (II) passou a ser adotada. Isto está de acordo com a teoria marginalista, onde a base para a construção de curvas de demanda por fatores é a relação inversa entre a remuneração de um fator e sua quantidade (dada a quantidade do outro fator). Aqui, uma queda do salário real levou a uma maior utilização do fator trabalho em relação ao fator capital. Entretanto, essa relação não vale para qualquer configuração distributiva. Voltando ao nosso gráfico, vemos que, se o salário cair abaixo de w2, ou seja, $w2<w<0$, a técnica (I) volta a ser a mais rentável e passa a ser adotada. Neste caso, a queda do salário real levou a adoção de uma técnica menos intensiva em trabalho, indo na direção contrária ao que prevê a teoria marginalista.

Como os preços relativos se comportam de maneira irregular quando muda a distribuição, é impossível estabelecer, de forma geral, qual a relação entre a intensidade de um fator e sua remuneração. Uma queda do salário real pode levar tanto a adoção de uma técnica mais intensiva em trabalho quanto uma técnica que use menos trabalho em relação a capital. Isto quer dizer que não existe base para a construção de curvas de demanda por cada fator negativamente inclinadas (relação inversa entre preço do fator e quantidade).

Apêndice

Autovalor

Um problema de autovalor se define como a solução não trivial do problema:

$$\mathbf{Av} = \lambda \mathbf{v}$$

Onde **A** é uma matrix *n*x*n* e **v** é um vetor coluna *n*x1. A solução trivial é caracterizada por **v** = **0**. A solução é encontrada por:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Este sistema só tem uma solução não trivial se, e somente se:

$$det|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \mathbf{0}$$

O determinante desta matrix é um polinômio de ordem *n*. Este polinômio é chamado de *polinômio característico*. A solução da equação acima nos dá n raízes, que podem ser repetidas ou não, chamadas de autovalores. Ou seja, uma matriz *n*x*n* possui n autovalores:

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$$

Plugando cada autovalor encontrado na solução do polinômio característico, achamos os *n* autovetores associados com cada autovalor:

$$(\mathbf{A} - \lambda_{\mathbf{i}} \mathbf{I})\mathbf{v_i} = \mathbf{0}$$